Chapitre 4 : Nombres complexes

4.1 Le corps des nombres complexes

4.1.1 Construction de $\mathbb{C}$

On considère l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des couples de réels. Pour rappel, $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

Sur cet ensemble, on définit deux opérations (une addition que l'on notera $\tilde{+}$ et une multiplication que l'on notera $\tilde{\times}$) définies par : pour tout $(x, y), (z, t) \in \mathbb{R}^2$

$$(x, y)\tilde{+}(z, t) = (x + z, y + t) \qquad \text{et} \qquad (x, y)\tilde{\times}(z, t) = (xz - yt, xt + yz)$$

Par exemple :

$$(1, 2)\tilde{+}(-2, 3) = (-1, 5) \qquad \text{et} \qquad (1, 2)\tilde{\times}(-2, 3) = (-2 - 6, 3 - 4) = (-8, -1)$$

Ces deux opérations vérifient un certain nombre de propriétés qui permettent d'avoir dans $\mathbb{R}^2$ les même règles de calculs algébriques que dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$. Par exemple, on a

- L'addition $\tilde{+}$ et la multiplication $\tilde{\times}$ sont commutatives et associatives.
- La multiplication $\tilde{\times}$ est distributive par rapport à l'addition $\tilde{+}$.
- Il existe un élément neutre pour $\tilde{+}$: $(0, 0)$. C'est à dire que pour tout (x, y) dans $\mathbb{R}^2$ on a
$$(x, y)\tilde{+}(0, 0) = (0, 0)\tilde{+}(x, y) = (x, y)$$
- Il existe de même un élément neutre pour $\tilde{\times}$: $(1, 0)$. C'est à dire que pour tout (x, y) dans $\mathbb{R}^2$ on a
$$(x, y)\tilde{\times}(1, 0) = (1, 0)\tilde{\times}(x, y) = (x, y)$$
- Tout élément (x, y) de $\mathbb{R}^2$ admet un élément opposé pour $\tilde{+}$: $(-x, -y)$. En effet, on a bien $(x, y)\tilde{+}(-x, -y) = (0, 0)$.
- Tout élément (x, y) de $\mathbb{R}^2$, sauf $(0, 0)$, admet un élément inverse pour $\tilde{\times}$: $\left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right)$. En effet, on a bien $(x, y)\tilde{\times}\left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right) = (1, 0)$

On dit alors que $\mathbb{R}^2$ muni des opérations $\tilde{+}$ et $\tilde{\times}$ est un *corps*. Intuitivement, un corps est un ensemble muni de deux opérations dans lequel les règles de calculs algébriques sont similaires à celle de $\mathbb{R}$. En particulier $\mathbb{R}$ muni de l'addition et la multiplication usuelle est lui-même un corps. Il en est de même pour $\mathbb{Q}$.

Définition 1
L'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des opérations $\tilde{+}$ et $\tilde{\times}$ est un corps appelé *corps des nombres complexes*. On le note $\mathbb{C}$.

4.1.2 Notations définitives

Le corps $\mathbb{R}$ est inclu dans le corps $\mathbb{C}$

A tout réel x, on associe l'unique nombre complexe $(x, 0)$. Ainsi tout réel x est vu comme le complexe $(x, 0)$ et tout complexe de la forme $(x, 0)$ est vu comme le réel x. Avec cette notation on peut considerer que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Le opérations dans $\mathbb{C}$ sont des extensions de celles de $\mathbb{R}$

Soit $x, y \in \mathbb{R}$, en adoptant la notation précédente on a :

$$x\tilde{+}y = (x, 0)\tilde{+}(y, 0) = (x + y, 0) = x + y$$

Ainsi l'addition $\tilde{+}$ de $\mathbb{C}$ est une extension de l'addition dans $\mathbb{R}$. On note donc simplement $+$, comme dans $\mathbb{R}$.
De même, on a

$$x\tilde{\times}y = (x, 0)\tilde{\times}(y, 0) = (xy, 0) = xy$$

Ainsi la multiplication $\tilde{\times}$ de $\mathbb{C}$ est une extension de la multiplication dans $\mathbb{R}$. De même, on la notera dorénavant $\times$.

L'élément i

On note i l'élément $(0, 1)$ de $\mathbb{C}$. Cet élément vérifie la propriété suivante :

$$i^2 = i \times i = (0, 1) \times (0, 1) = (-1, 0) = -1$$

Enfin, avec toutes ces notations, tout nombre complexe (x, y) s'écrit :

$$(x, y) = (x, 0) \times (1, 0) + (y, 0) \times (0, 1) = x \times 1 + y \times i = x + iy$$

Définition 2

Si z est un nombre complexe, il existe un unique couple de réels (x, y) tel que $z = x + iy$. Les réels x et y sont appelés respectivement *partie réelle* et *partie imaginaire* du complexe z et sont notés :

$$x = \mathrm{Re}(z) \qquad \text{et} \qquad y = \mathrm{Im}(z)$$

L'écriture d'un complexe z sous la forme $x + iy$ est appelée forme algébrique de z.
Les nombres complexes de la forme iy sont appelés les *imaginaires purs*. L'ensemble de tous les imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.

Remarque : Les opérations définies dans $\mathbb{C}$ font de $\mathbb{C}$ une extension naturelle de $\mathbb{R}$, en particulier pour l'addition et la multiplication. La notation $x + iy$ pour un nombre complexe, permet alors de s'affranchir des définitions lourdes de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{C}$. En effet, la somme et le produit de deux nombre complexes se fait naturellement à l'aide des règles usuelles de calculs (développement, factorisation) :

$$(x + iy) + (x' + iy') = x + iy + x' + iy' = (x + x') + i(y + y')$$

$$(x + iy) \times (x' + iy') = xx' + iyx' + ixy' + i^2yy' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$$

4.1.3 Conjugaison

Définition 3

Soit $z = a + ib$ un complexe. On appelle conjugué de z le nombre complexe $a - ib$. Le nombre conjugué de z est noté $\overline{z}$.

Proposition 4

pour $z, z' \in \mathbb{C}$, on a

1. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z}'$;
2. $\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z}'$;
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ \overline{z^n} = \overline{z}^n$;
4. $\overline{\overline{z}} = z$;
5. $\overline{z^{-1}} = \overline{z}^{-1}$;
6. $z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$
7. $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ et $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$
8. $z = -\overline{z} \iff z \in i\mathbb{R}$ (i.e. z est imaginaire pur)

Mise sous forme algébrique d'un quotient de nombres complexes : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul de sorte que $(a, b) \neq (0, 0)$. Alors

$$\frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 - (ib)^2} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}$$

Exemples :

$$\frac{1 + 2i}{1 - i} = \frac{(1 + 2i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{-1 + 3i}{2}$$

Caractériser le fait qu'un nombre complexe est réel ou imaginaire pur :
Soit $z \in \mathbb{C}$ et $Z = iz$ alors :

$$Z \in \mathbb{R} \iff Z = \overline{Z} \iff iz = \overline{iz} \iff iz = -i\overline{z} \iff z = -\overline{z} \iff z \in i\mathbb{R};$$

$$Z \in i\mathbb{R} \iff Z = -\overline{Z} \iff iz = -\overline{iz} \iff iz = i\overline{z} \iff z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}.$$

Exercice : Ecrire sous forme algébrique,

1. les inverses des nombres complexes suivant : $i,\ 1 + 2i,\ 3 - 4i$;
2. les nombres complexes suivant :
$$\frac{1 - 2i}{3 + i},\ \frac{2 + i}{2 - i},\ \frac{(1 - 4i)(1 - i)}{(1 + i)^2};$$
3. Donner une caractérisation simple pour que le nombre complexe $Z = 1 + iz$ soit un réel.

4.1.4 Représentation géométrique des nombres complexes

On identifie $\mathbb{C}$ au plan $(\mathcal{P})$ usuel muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

- A tout nombre complexe $z = a + ib$ on associe le point M du plan de coordonnées (a, b) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- Le complexe z est appelé affixe du point M. Le point M est appelé l'image du complexe z.
- Il y a une bijection entre l'ensemble des points du plan et l'ensemble des nombres complexes ; i.e. à chaque point correspond un complexe et un seul :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ a+ib & \longmapsto & (a,b) \end{array} \qquad \text{l'application } \Phi \text{ est bijective.}$$

On identifie de même $\mathbb{C}$ avec l'ensemble des vecteurs du plan. Soit $\vec{\mathcal{P}}$ l'ensemble des vecteurs du plan $\mathcal{P}$. On munit $\vec{\mathcal{P}}$ d'une base $(\vec{i}, \vec{j})$ orthonormée direct.
A tout nombre complexe $z = a + ib \in \mathbb{C}$ on associe le vecteur $\vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}$ de coordonnées (a, b) dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
De même, le complexe z est appelé affixe du vecteur $\vec{u}$. Le vecteur $\vec{u}$ est appelé l'image du complexe z.

Il y a une bijection entre l'ensemble des vecteurs du plan $\vec{\mathcal{P}}$ et l'ensemble des nombres complexes :

$$\vec{\Phi} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \vec{\mathcal{P}} \\ a+ib & \longmapsto & (a,b) \end{array} \qquad \text{l'application } \vec{\Phi} \text{ est bijective.}$$

Axe des réels et des imaginaires purs : les nombres réels, i.e. les nombres complexes ayant pour partie imaginaire 0 sont représentés par l'ensemble des points de l'axe des abscisses.
De même, les imaginaires purs, i.e. les nombres complexes ayant pour partie réelle 0 sont représentés par l'ensemble des points de l'axe des ordonnées.

Proposition 5

1. Soient A et B deux points de $\mathcal{P}$ d'affixes respectives z_A et z_B. Alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.
2. Soient A et B deux points de $\mathcal{P}$ d'affixes respectives z_A et z_B. Le milieu I de $[A, B]$ a pour affixe $\frac{z_A+z_B}{2}$.
3. Soient $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ deux vecteurs d'affixes respectives z et z' et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors le vecteur $\overrightarrow{u+u'}$ a pour affixe $z + z'$ et le vecteur $\overrightarrow{\lambda u}$ a pour affixe λz.
4. Soit M un point d'affixe z. Alors le point M' d'affixe $\overline{z}$ est le symétrique de M par rapport à l'axe (Ox).
5. Soit M un point d'affixe z. Alors le point M' d'affixe $-\overline{z}$ est le symétrique de M par rapport à l'axe (Oy).
6. Soit M un point d'affixe z. Alors le point M' d'affixe $-z$ est le symétrique de M par rapport à O.

4.1.5 Module d'un nombre complexe

Définition 6

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On appelle module du nombre complexe z et on note $|z|$ la quantité :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Remarque : On retrouve ici la formule de la norme d'un vecteur et il est évident que :

1. Si M est un point d'affixe z alors $|z| = OM$
2. Si $\vec{u}$ est un vecteur d'affixe z alors $|z| = \|\vec{u}\|$. En particulier si A et B sont deux points d'affixes respectifs z_A et z_B alors $AB = |z_B - z_A|$.

Quelques interprétations géométriques :
Soient $(\omega, \omega') \in \mathbb{C}^2$ et r un réel positif. Soit Ω et Ω' les points du plan d'affixe respectif ω et ω'.

1. $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-\omega| = r\}$ est le cercle de centre Ω d'affixe ω et de rayon r.
2. $D(\omega, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-\omega| \leq r\}$ est le disque fermé de centre Ω d'affixe ω et de rayon r.
3. $D(\omega, r[= \{z \in \mathbb{C} \mid |z-\omega| < r\}$ est le disque ouvert de centre Ω d'affixe ω et de rayon r.
4. $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-\omega| = |z-\omega'|\}$ est la médiatrice du segment $[\Omega\Omega']$.

Proposition 7

Pour $z, z' \in \mathbb{C}$ et $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, on a

1. $|z| = |\overline{z}|$
2. $|zz'| = |z||z'|$
3. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
4. $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$
5. $|z|^2 = z\overline{z}$
6. $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$
7. $|z+z'| \leq |z| + |z'|$ (Inégalité triangulaire) ;
8. $|z+z'| = |z| + |z'| \Leftrightarrow z = 0$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{R}+,\ z' = \lambda z$
9. $|z_1 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + \cdots + |z_n|$;
10. $||z| - |z'|| \leq |z+z'| \leq |z| + |z'|$.
11. $|z+z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{z'})$.

Remarque : Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $z = a + ib$. Alors

$$a^2 + b^2 = |z|^2 = z\overline{z} = (a+ib)(a-ib)$$

On retrouve ici la factorisation $a^2 + b^2 = a^2 - (ib)^2 = (a+ib)(a-ib)$.

4.2 Forme trigonométrique des nombres complexes

4.2.1 Le groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de modules 1

Définition 8

L'ensemble des nombres complexes de module 1 est noté $\mathbb{U}$:

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

Remarque : Interprétation géométrique : l'ensemble $\mathbb{U}$ est le cercle unité de $\mathcal{P}$, c'est à dire le cercle de centre O et de rayon 1.

Proposition 9

$(\mathbb{U}, \times)$ est un groupe commutatif, car il vérifie les propriétés suivantes :

1. $1 \in \mathbb{U}$
2. $\forall (z, z') \in \mathbb{U}^2\ zz' \in \mathbb{U}$
3. $\forall z \in \mathbb{U},\ \dfrac{1}{z} \in \mathbb{U}$

Tout élément $z \in \mathbb{U}$ vérifie de plus :

1. $z\overline{z} = |z|^2 = 1$
2. $\dfrac{1}{z} = \overline{z}$
3. $\overline{z} \in \mathbb{U}$

Lemme 10

Soit a et b deux réels. Alors $a^2 + b^2 = 1$ si et seulement s'il existe un réel θ, unique modulo 2π, tel que $a = \cos(\theta)$ et $b = \sin(\theta)$.

Corollaire 11

Soit $z \in \mathbb{C}$. Le nombre complexe z appartient au groupe $\mathbb{U}$ si et seulement si il existe θ, unique modulo 2π, tel que $z = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

Remarque : Géométriquement, le corollaire précédent exprime le fait que le cercle unité $\mathcal{C}$ admet la représentation paramétrique suivante

$$\begin{cases} x(\theta) = \cos\theta \\ y(\theta) = \sin\theta \end{cases} \quad ; \ \theta \in \mathbb{R}$$

C'est à dire : $\mathcal{C} = \{(\cos\theta, \sin\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$.

Définition 12

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Remarque :

- A ce stade, $e^{i\theta}$ est une notation et n'a à priori rien à voir avec l'exponentielle. On verra qu'en effet il s'agit d'une extention de l'exponentielle réelle et qu'elle vérifie les même propriétés algébriques.
- Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $\mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{e}^{i\theta + 2k\pi}$. Donc pour un complexe z, le réel θ tel que $z = \mathrm{e}^{i\theta}$ n'est pas unique. On dit par contre qu'il est unique à 2π près.

Valeurs remarquables : $\forall k \in \mathbb{Z} :\ e^{i2k\pi} = 1; \quad e^{i(2k+1)\pi} = -1; \quad e^{i\frac{\pi}{2} + i2k\pi} = i; \quad e^{-i\frac{\pi}{2} + i2k\pi} = -i.$

Proposition 13

Pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, on a :

1. $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$.
2. $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
3. $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
4. $|e^{i\theta}| = 1$
5. $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid \theta = \theta' + 2k\pi$.

Proposition 14 : Formule d'Euler

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}; \qquad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Proposition 15 : Formule de Moivre

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Méthode : factorisation d'une somme d'exponentielles complexes :
Il est possible de factoriser les expressions de la forme $e^{i\theta} + e^{i\varphi}$. Pour cela on factorise par $e^{i(\theta+\varphi)/2}$. Remarquons que $(\theta + \varphi)/2$ est la moyenne des deux réels θ et φ.

$$e^{i\theta} + e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)/2}\left(e^{i(\theta-\varphi)/2} + e^{-i(\theta-\varphi)/2}\right) = 2\cos((\theta - \varphi)/2)e^{i(\theta+\varphi)/2}$$

De même

$$e^{i\theta} - e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)/2}\left(e^{i(\theta-\varphi)/2} - e^{-i(\theta-\varphi)/2}\right) = 2i\sin((\theta - \varphi)/2)e^{i(\theta+\varphi)/2}$$

Cette méthode permettra en particulier de calculer module et arguments de ce type d'expression. Mais permet aussi de retrouver des formules de trigonométrie :

$$\begin{aligned} \cos(p) + \cos(q) &= \frac{1}{2}\left(e^{ip} + e^{-ip} + e^{iq} + e^{-iq}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{i\frac{p+q}{2}}\left[e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{-i\frac{p-q}{2}}\right] + e^{-i\frac{p+q}{2}}\left[e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{-i\frac{p-q}{2}}\right]\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[e^{i\frac{p+q}{2}} + e^{-i\frac{p+q}{2}}\right]\left[e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{-i\frac{p-q}{2}}\right] = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \end{aligned}$$

4.2.2 Argument d'un nombre complexe

Définition 16

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ alors $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$. On appelle argument de z tout réel θ tel que

$$\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}.$$

Tous les arguments de z sont donc égaux modulo 2π. On note

$$\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$$

La notation $z = |z|e^{i\theta}$ est appelé forme trigonométrique du complexe z.

Rappel : Soit $z = a + ib$ un complexe non nul. Notons r le module de z et θ un argument de z. Comme $a + ib = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$, on a

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} \\ \sin(\theta) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|} \end{cases}$$

On applique ces formules pour déterminer la forme trigonométrique des nombres complexes. Exemple : déterminer la forme trigonométrique de $z = \sqrt{3} + i$.

Proposition 17 : Propriétés des arguments

Soient $(z, z') \in \mathbb{C}^*$. On a

$$\arg(\overline{z}) \equiv \arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z) \mod 2\pi$$

$$\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \mod 2\pi$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z') \mod 2\pi$$

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \arg(z^n) \equiv n\arg(z) \mod 2\pi.$$

Remarque : Attention, le complexe 0 n'a pas d'argument et donc ne peut pas être écrit sous forme trigonométrique.

Corollaire 18 : Interprétation géométrique de l'argument

1. Si M est un point d'affixe $z \neq 0$, un argument de z est une mesure de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.
2. Si $\vec{v}$ est un vecteur non nul d'affixe z, un argument de z est une mesure de l'angle orienté $(\vec{i}, \vec{v})$.
3. Si $\vec{v}$ et $\vec{u}$ sont deux vecteurs non nuls d'affixes respectifs z_v et z_u

$$(\vec{u}, \vec{v}) \equiv (\vec{u}, \vec{i}) + (\vec{i}, \vec{v}) \equiv (\vec{i}, \vec{v}) - (\vec{i}, \vec{u}) \equiv \arg\left(\frac{z_v}{z_u}\right) \equiv \arg(z_v\overline{z}_u) \mod 2\pi.$$

En particulier, soient trois points du plan A, B et C d'affixes respectifs z_A, z_B et z_C alors

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \arg\left((z_C - z_A)\overline{(z_B - z_A)}\right) \mod 2\pi$$

4.2.3 Exponentielle complexe

Définition 19

Soit $z \in \mathbb{C}$ de forme algébrique $z = a + ib$. On définit le nombre complexe e^z par :

$$e^z = e^a \cdot e^{ib} = e^a(\cos b + i \sin b)$$

Remarque :

1. Attention, à ce stade pour z un nombre complexe, e^z est une simple notation. On verra que l'emploi de cette notation est justifié car l'exponentielle complexe vérifie les même propriétés algébriques que l'exponentielle réelle et que si $z \in \mathbb{R}$ alors e^z est égal à l'exponentielle réelle de z. En ce sens, l'exponentielle complexe ainsi définie est une extension de l'exponentielle réelle.
2. On note également $\exp(z)$. Remarquons que pour $z = i\theta$ un imaginaire pur, on retrouve $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$.

Proposition 20

Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, on a : $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.

Proposition 21 : Propriétés de l'exponentielle complexe

Soit $z \in \mathbb{C}$:

1. $e^z \neq 0$;
2. $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$;
3. $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$; $\arg(e^z) \equiv b\ [2\pi]$,
4. $(e^z)^{-1} = e^{-z}$;
5. $e^z = e^{z'} \iff z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

4.3 Equations algébriques dans $\mathbb{C}$

4.3.1 Racines carrées d'un nombre complexes

Définition 22

On appelle racine carrée d'un nombre complexe z tout nombre complexe ω vérifiant $\omega^2 = z$.

Proposition 23

Soit z un complexe non nul de module r et d'argument θ. Alors z possède exactement deux racines carrées distinctes ω_1 et ω_2 :

$$\omega_1 = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}} \text{ et } \omega_2 = \sqrt{r}e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)} = -\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

Il remarquable que la recherche des racines carrées est très simple si z est donné sous forme trigonométrique. Donnons donc une méthode pour déterminer les racines carrées de z donné sous forme algébrique.

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe (cette fois pas nécessairement non nul). On cherche les complexes $\omega = x + iy$ vérifiant $\omega^2 = z$. On a

$$\omega^2 = z \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = a + ib$$

En comparant les parties réelles et imaginaires on obtient :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

Notons de plus que $|\omega|^2 = |z|$ nous donne $x^2 + y^2 = |z|$. Finalement x, y vérifient le système

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = |z| \\ 2xy = b \end{cases} .$$

On en déduit $x^2 = \frac{a+|z|}{2}$ et $y^2 = \frac{|z|-a}{2}$. Remarquons que ces quantités sont positives puisque $a = \mathrm{Re}(z) \leq |z|$ et $-b = -\mathrm{Im}(z) \leq |z|$. Alors

$$x = \pm\sqrt{\frac{|z|+a}{2}} \qquad \text{et} \qquad y = \pm\sqrt{\frac{|z|-a}{2}}$$

Mais signe(xy) = signe(b). On en déduit alors les deux couples opposées (x, y) solutions.

Exemple : Déterminons les racines carrées de $z = 2 - 3i$. Soit $\omega = x + iy \in \mathbb{C}$ tel que $\omega^2 = 2 - 3i$. Alors

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{13} \\ 2xy = -3 \end{cases}$$

Ainsi

$$x^2 = \frac{2+\sqrt{13}}{2} \qquad \text{et} \qquad y^2 = \frac{-2+\sqrt{13}}{2}$$

Puisque $xy < 0$, on a

$$(x, y) = \left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{13}}{2}}, -\sqrt{\frac{-2+\sqrt{13}}{2}}\right) \qquad \text{ou} \qquad (x, y) = \left(-\sqrt{\frac{2+\sqrt{13}}{2}}, \sqrt{\frac{-2+\sqrt{13}}{2}}\right)$$

Les racines carrées de $2 - 3i$ sont les complexes

$$-\sqrt{\frac{2+\sqrt{13}}{2}} + i\sqrt{\frac{-2+\sqrt{13}}{2}} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{\frac{2+\sqrt{13}}{2}} - i\sqrt{\frac{-2+\sqrt{13}}{2}}$$

Remarque :

- Le seul complexe n'ayant pas deux racines carrées et le réel 0. Il n'en a qu'une qui est 0.
- Pour un réel positif on parle de **LA** racine carrée pour désigner des deux racines celles qui est positive. Cette distinction est impossible dans $\mathbb{C}$ donc on parle toujours "d'une" racine carrée ou "des" racines carrées. Il est **ABSOLUMENT INTERDIT**, pour la même raison, d'utiliser le symbole $\sqrt{\ }$ pour désigner les racines carrées d'un nombre complexes. En effet cette notation dans $\mathbb{C}$ ne pas avoir de sens puisque qu'elle ne désigne pas de manière unique un nombre complexe. Ce symbole est exclusivement réservé aux réels positifs.

Corollaire 24

- Les deux racines carrées d'un nombres complexe non nul z sont opposées. Donc si ω est une racine carrée la seconde est $-\omega$.
- Les deux racines carrées d'un nombre réel x strictement positifs sont les réels $\sqrt{x}$ et $-\sqrt{x}$.
- Les deux racines carrées complexes d'un nombre réel x strictement négatif sont $i\sqrt{|x|}$ et $-i\sqrt{|x|}$.

4.3.2 Equation du second degré

Il s'agit de la résolution d'équations de la forme $az^2 + bz + c = 0$ avec a, b et c des nombre complexes, a étant non nul. La résolution est identique au cas réel. Mais dans le cas complexes il y a toujours des solutions.

Proposition 25

Soient a, b, c des nombres complexes avec $a \neq 0$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$. Δ est appelé discriminant.

- si $\Delta \neq 0$ on considère δ une des deux racines carrées du discriminant Δ, i.e. un nombre complexe tel que $\Delta = \delta^2$. Alors : l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet 2 racines distinctes qui sont

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$$

- si $\Delta = 0$ l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet une racine distinctes double qui est

$$z_0 = \frac{-b}{2a}$$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $z^2 + z + 1 = 0$ puis $z^2 + (1 - i)z + 4 + 7i = 0$.

Cas particulier : supposons que nous disposons d'une équation d'inconnue complexe z du second degré à **coefficients réels** a, b, c avec $a \neq 0$:

$$(E): \; az^2 + bz + c = 0$$

Supposons que le discriminant Δ est strictement négatif. Dans ce cas nous savons qu'il n'y a pas de solutions réelles, mais bien sur, comme $\Delta \neq 0$ l'équation a deux solutions complexes. De plus comme Δ est un réel strictement négatif, ses deux racines carrées complexes sont donc

$$\delta_1 = i\sqrt{|\Delta|} \text{ et } \delta_2 = -i\sqrt{|\Delta|}$$

En effet $\delta_1^2 = i^2 \sqrt{|\Delta|}^2 = -|\Delta| = \Delta$ puisque Δ est négatif. De même $\delta_2^2 = \Delta$.
De la proposition précédente nous déduisons que les solutions de l'équation (E) sont les nombres complexes

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2} \text{ et } z_2 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2}$$

et ces nombres sont **conjugués**. Par exemple, nous avons vu que le discriminant de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ est $\Delta = -3$ et ses solutions les nombres complexes conjugués

$$z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2a}$$

Ce résultat est formalisé dans la proposition suivante :

Proposition 26

Soient a, b et c des nombres **réels** et l'équation $(E): \; az^2 + bz + c = 0$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- le nombre complexe z_0 est racine de l'équation (E)
- le nombre complexe $\overline{z}_0$ est racine de l'équation (E)

Attention : la proposition précédente n'est vraie que pour un trinôme à coefficients **réels**.

4.3.3 Equations de degré supérieur

Définition 27

On appelle fonction polynomiale à coefficient complexe toute fonction $P \in \mathcal{F}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ pour laquelle il existe $n \in \mathbb{N}$ et des nombres complexes $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ tels que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \; P(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$$

Proposition 28

Soit P une fonction polynomiale à coefficients complexes et $a \in \mathbb{C}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $P(a) = 0$
- Il existe Q une fonction polynomiale à coefficients complexes telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z - a)Q(z)$

Remarque : On détermine la fonction poylynomiale Q par identification ou par division euclidienne. Exemple : on considère $P : z \mapsto z^3 - iz^2 + (1+i)z + (1-i)$. On observe que $P(i) = 0$, déterminer la fonction polynomiale Q telle que $P(z) = (z-i)Q(z)$.

Définition 29

Soit $P : z \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ une fonction polynomiale à coefficients complexes. On définit la fonction $\overline{P}$, également polynomiale à coefficients complexes par :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \overline{P}(z) = \sum_{i=0}^{n} \overline{a}_i z^i$$

Exemple : Si $P(z) = 2iz^3 + (1+2i)z^2 + (3-i)z + 3 + 7i$ alors $\overline{P}(z) = -2iz^3 + (1-2i)z^2 + (3+i)z + 3 - 7i$.

Proposition 30

Soient P une fonction polynomiale à coefficients **complexes** et $z_0 \in \mathbb{C}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $P(z_0) = 0$
- $\overline{P}(\overline{z}_0) = 0$

Autrement dit : Le nombre complexe z_0 est solution de l'équation $P(z) = 0$ si et seulement si le nombre complexe $\overline{z}_0$ est l'équation $\overline{P}(z) = 0$

Exemple : Déterminer les solutions complexes de l'équation $z^2+iz+1 = 0$. En déduire celles de l'équation $z^2-iz+1 = 0$.

Corollaire 31

Soient P une fonction polynomiale à coefficients **réels** et $z_0 \in \mathbb{C}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $P(z_0) = 0$
- $P(\overline{z}_0) = 0$

Autrement dit : Le nombre complexe z_0 est solution de l'équation $P(z) = 0$ si et seulement si le nombre complexe $\overline{z}_0$ est l'équation $P(z) = 0$.

Attention : la proposition précédente n'est vraie que pour une fonction polynomiale à coefficients **réels**.

Exemple : Factoriser dans $\mathbb{R}$ l'expression polynomiale $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6$.

4.3.4 Racine n-ièmes d'un nombre complexe

Définition 32

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$ on appelle racine n-ième de z tout nombre complexe ω vérifiant de $\omega^n = z$.

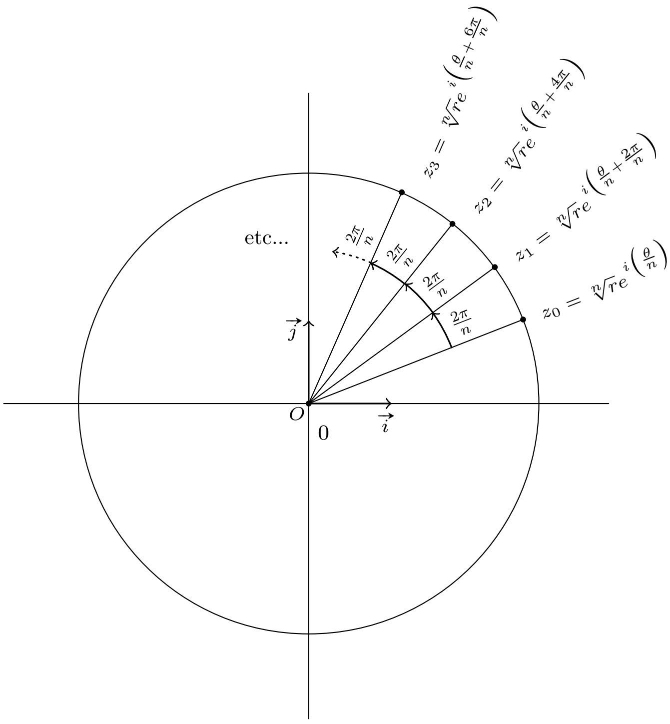
Proposition 33

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument θ. Alors z admet exactement n racines n-èmes distinctes. Ces racines sont les nombres complexes :

$$\sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)},\ k \in \{0, \dots, n-1\}$$

Exemple : Donner dans $\mathbb{C}$ les racines 3-ème de $\frac{1-i}{4}$ et les racines 6-ème de $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$.

Remarque :
- Le nombre complexe 0 admet une seule racine n-ième qui est 0.
- On ne donne pas ici de méthode pour calculer la racine n-ème d'un nombre complexe donné sous forme algébrique.
- **Important :** Vu la forme des racines n-ième de z, si l'on en trouve une, on déduit les autres par $n-1$ rotations successives de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{n}$.



4.3.5 Racines n-ième de l'unité

Définition 34

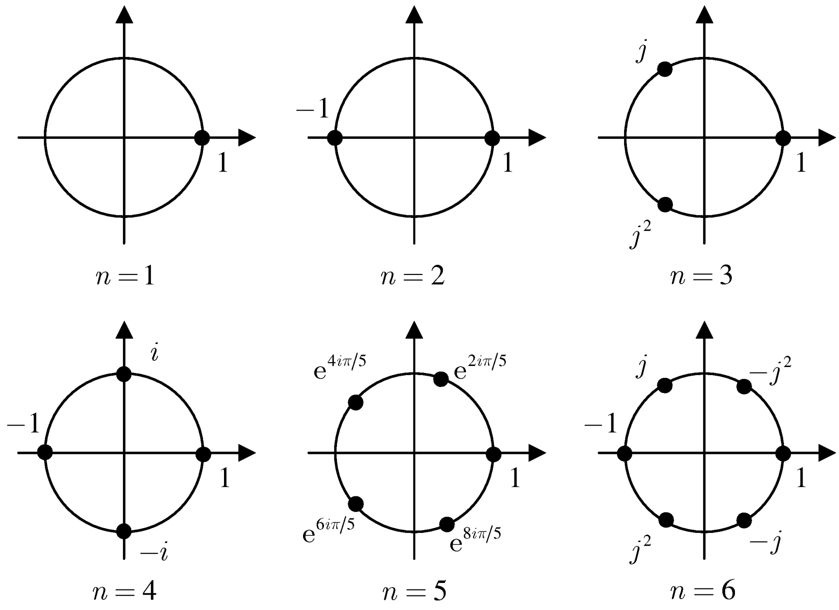
On appelle racine n-ième de l'unité tout nombre complexe ω vérifiant $\omega^n = 1$. L'ensemble des racines n-ième de l'unité est noté $\mathbb{U}_n$.
D'après la proposition 33, on a

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in \{0, \dots, n-1\} \right\}.$$

Exemple : On a

$$\mathbb{U}_2 = \{1, -1\} \qquad , \qquad U_3 = \left\{1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\} = \{1, j, j^2\} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{U}_4 = \{1, i, -1, -i\}$$

Il utile de retenir que $1 + j + j^2 = 0$ que $j^3 = 1$ et que $\overline{j} = j^2$.



Géométriquement, placer les n racines n-ième de l'unité sur le cercle trigonométrique revient à découper le cercle en n parties égales en partant du point d'affixe 1.

Remarque : Pour $n \geq 1$, les complexes $e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k \in \{0, \dots, n-1\}$ sont donc les n racines du polynôme $z^n - 1$. On a donc la factorisation suivante :

$$z^n - 1 = (z-1)\left(z - e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)\left(z - e^{\frac{4i\pi}{n}}\right)\cdots\left(z - e^{\frac{2i(n-1)\pi}{n}}\right) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(z - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$$

Proposition 35

$(\mathbb{U}_n, \cdot)$ est un groupe commutatif, c'est un sous groupe de $(\mathbb{U}, \cdot)$, c'est à dire que $\mathbb{U}_n$ vérifie :

1. $1 \in \mathbb{U}_n$
2. $\forall z, z' \in \mathbb{U}_n,\ zz' \in \mathbb{U}_n$
3. $\forall z \in \mathbb{U}_n,\ z \neq 0$ et $\frac{1}{z} \in \mathbb{U}_n$.

Remarque : pour $z \in \mathbb{U}_n$, on a bien sur $\frac{1}{z} = \overline{z}$. En particulier $\overline{z} \in \mathbb{U}_n$.

Proposition 36

Soient z et z' deux racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul, alors il existe une racine n-ième de l'unité ω telle que

$$z' = \omega z.$$

Corollaire 37

Soit $\omega \in \mathbb{C}^*$. Si z est une racine n-ième de ω alors l'ensembles des racines n-ième de ω sont les complexes

$$ze^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k \in [\![0, n-1]\!]$$

Exemple : Donnons les racines 5-ième de 32 dans $\mathbb{C}$.

Proposition 38

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. u est une racine n-ième de l'unité distincte de 1
2. $\sum_{i=0}^{n-1} u^i = 1 + u + u^2 + \cdots + u^{n-1} = 0$

Autrement dit les racines complexes du polynôme $1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}$ sont les racines n-ième de l'unité distinctes de 1. On a donc la factorisation suivante : pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1}(z - e^{\frac{2ik\pi}{n}})$$

Remarque : Soit $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(z - e^{\frac{2ik\pi}{n}})$, on a :

$$z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(z - e^{\frac{2ik\pi}{n}}) = (z-1)\prod_{k=1}^{n-1}(z - e^{\frac{2ik\pi}{n}}) = (z-1)(1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1})$$

on retrouve donc la formule suivante

$$z^n - 1 = (z-1)\sum_{k=0}^{n-1} z^k$$

4.4 Nombres complexes et géométrie

4.4.1 Alignement et orthogonalité

Proposition 39

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan d'affixes respectifs z_u et z_v.

1. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\frac{z_u}{z_v}$ est réel.
2. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\frac{z_u}{z_v}$ est imaginaire pur.

Corollaire 40

Soient trois points $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ du plan complexe, distincts deux à deux :

1. A, B et C sont alignés si et seulement si $\frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$.
2. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux si et seulement si $\frac{c-a}{b-a} \in i\mathbb{R}$.

4.4.2 Transformations du plan

Rotation de centre O :
Soit M un point du plan. On appelle rotation de centre O et d'angle θ l'application du plan vers le plan qui transforme M en M', l'unique point vérifiant : $OM = OM'$ et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta$.

Proposition 41

L'application

$$r : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & e^{i\theta} z \end{array}$$

est une rotation de centre O et d'angle θ.

Rotation quelconque :
Soit M un point du plan. On appelle rotation de centre Ω et d'angle θ l'application du plan vers le plan qui transforme M en M', l'unique point vérifiant : $\Omega M = \Omega M'$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta$.

Proposition 42

L'application
$$r: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & e^{i\theta}(z-\omega)+\omega \end{array}$$
est une rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle θ.

Translation :
La translation de vecteur $\vec{v}$ est l'application du plan vers le plan qui transforme M et M', l'unique point du plan vérifiant $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$.

Proposition 43

L'application
$$t: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z+b \end{array}$$
est la translation de vecteur $\vec{v}$, le vecteur d'affixe b.

Homothétie de centre O :
L'homothétie de centre O et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ est est l'application du plan vers le plan qui transforme M et M', l'unique point du plan vérifiant $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

Proposition 44

Soit $k \in \mathbb{R}^*$. L'application
$$h: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & kz \end{array}$$
est l'homothétie de centre O et de rapport k.

Homothétie quelconque :
L'homothétie de centre Ω et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ est est l'application du plan vers le plan qui transforme M et M', l'unique point du plan vérifiant $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$.

Proposition 45

Soit $k \in \mathbb{R}^*$. L'application
$$h: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & k(z-\omega)+\omega \end{array}$$
est l'homothétie de centre Ω, le point d'affixe ω, et de rapport k.

Remarque :

- Une rotation d'angle $2k\pi$ est l'indentité. De même pour une translation de vecteur 0 et une homothétie de rapport 1.
- Une homothétie de rapport -1 est une rotation d'angle $\pi + 2k\pi$.

Symétrie d'axe (Ox) et (Oy) :

Proposition 46 : Ecriture complexe

- L'application
$$s_x: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \overline{z} \end{array}$$
est la symétrie d'axe (Ox).
- L'application
$$s_y: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & -\overline{z} \end{array}$$

est la symétrie d'axe (Oy).

Applications des formules de Moivre et d'Euler à la trigonométrie

1) Linéarisation

Linéariser une expression trigonométrique c'est transformer les produits de $\cos\theta$ et $\sin\theta$ en un somme de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$. Pour cela on utilise les formules d'Euler :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}; \qquad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Exemple :

$$\cos^3(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^3 = \frac{e^{3i\theta} + 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} + e^{-3i\theta}}{8} = \frac{e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}}{8} + 3\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{8} = \frac{\cos(3\theta)}{4} + 3\frac{\cos(\theta)}{4}$$

Application : calcul d'une primitive de $x \mapsto \cos^3(x)$:

$$\int \cos^3(x)dx = \frac{1}{4}\int \cos(3x)dx + \frac{3}{4}\int \cos(x)dx = \frac{1}{12}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x)$$

Second exemple :

$$\begin{aligned}
\cos^4(\theta)\sin(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^4 \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right) = \left(\frac{e^{4i\theta} + 4e^{3i\theta}e^{-i\theta} + 6e^{2i\theta}e^{-2i\theta} + 4e^{i\theta}e^{-3i\theta} + e^{-4i\theta}}{16}\right)\left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right) \\
&= \left(\frac{e^{4i\theta} + e^{-4i\theta} + 4(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) + 6}{16}\right)\left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right) \\
&= \frac{e^{5i\theta} - e^{-5i\theta} - e^{3i\theta} + e^{-3i\theta} + 4(e^{3i\theta} - e^{-3i\theta} - e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + 6(e^{i\theta} - e^{-i\theta})}{32i} \\
&= \frac{1}{16}\sin(5\theta) + \frac{3}{16}\sin(3\theta) + \frac{1}{8}\sin(\theta)
\end{aligned}$$

2) Délinéarisation

Il s'agit du problème inverse : transformer une expression trigonométrique linéarisée en une expression trigonométrique polynomiale. Cette fois on utilise la formule de Moivre :

Exemple :

$$\begin{aligned}
\cos(4\theta) + i\sin(4\theta) &= (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^4 \\
&= \cos^4(\theta) + 4i\cos^3(\theta)\sin(\theta) - 6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) - 4i\cos(\theta)\sin^3(\theta) + \sin^4(\theta) \\
&= \cos^4(\theta) + \sin^4(\theta) - 6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) + 4i(\cos^3(\theta)\sin(\theta) - \cos(\theta)\sin^3(\theta))
\end{aligned}$$

En comparant parties réelles et imaginaires, on obtient

$$\cos(4\theta) = \cos^4(\theta) + \sin^4(\theta) - 6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) \quad \text{et} \quad \sin(4\theta) = 4(\cos^3(\theta)\sin(\theta) - \cos(\theta)\sin^3(\theta))$$

3) Calcul de sommes

On désire calculer la somme $\sum_{k=0}^{n}\cos(kt)$. On a

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(kt) + i\sum_{k=0}^{n}\sin(kt) = \sum_{k=0}^{n}[\cos(kt) + i\sin(kt)] = \sum_{k=0}^{n}\left(e^{it}\right)^k$$

Il y a deux situations :

- Si $t = 0[2\pi]$, alors $\sum_{k=0}^{n}\left(e^{it}\right)^k = n+1$.
- Si $t \neq 0[2\pi]$ alors

$$\sum_{k=0}^{n}\left(e^{it}\right)^k = \frac{1 - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}} = \frac{e^{i(n+1)t/2}\left(e^{-i(n+1)t/2}) - e^{i(n+1)t/2}\right)}{e^{it/2}(e^{-it/2} - e^{it/2})} = e^{int/2}\frac{\sin((n+1)t/2)}{\sin(t/2)}$$

Finalement en comparant parties réelles et imaginaires, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(kt) = \begin{cases} n+1 & \text{si } t = 0[2\pi] \\ \cos\left(\frac{n}{2}t\right)\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n}\sin(kt) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0[2\pi] \\ \sin\left(\frac{n}{2}t\right)\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} & \text{sinon} \end{cases}$$

Quelques méthodes de résolution d'équations complexes.

1) Chercher des factorisations faciles : Considérons par exemples l'équation :

$$(z^2+4z+1)^2+(3z+5)^2=0 \quad (E)$$

Il ne faut pas développer l'expression au risque d'avoir un polynôme de degré 4. On reconnait ici une identité remarquable : $a^2+b^2=(a-ib)(a+ib)$. Alors l'équation (E) est équivalente à :

$$(z^2+4z+1-i(3z+5))(z^2+4z+1+i(3z+5))=0 \Leftrightarrow z^2+4z+1-i(3z+5)=0 \text{ ou } z^2+4z+1+i(3z+5)=0$$

Il s'agit alors de résoudre deux équations du second degré avec la méthode du discriminant.

2) Chercher une solution évidente : Si $\alpha \in \mathbb{C}$ est solution évidente de l'équation

$$z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0=0$$

Alors on peut factoriser le polynôme $z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0$ par $(z-\alpha)$. Considérons par exemple l'équation :

$$z^3+iz^2+2z-3iz-3+2i \qquad (E)$$

On voit que $z=1$ est solution évidente et $z^3+iz^2+2z-3iz-3+2i=(z-1)(z^2+(1+i)z+3-2i)$. Finalement (E) est équivalente à

$$(z-1)=0 \text{ ou } z^2+(1+i)z+3-2i=0$$

Encore une fois on doit résoudre un polynôme du second degré.

3) Chercher une solution réelle : Pour résoudre une équation complexe, on peut chercher dans un premier temps s'il y a des solutions réelles. Cette méthode permet d'étudier des équations de degré plus petit. Considérons par exemple l'équation complexe

$$z^3+z^2+(-1+3i)z+44+12i=0 \qquad (E)$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ une solution réelle de cette équation, alors :

$$x^3+x^2+(-1+3i)x+44+12i=0 \Leftrightarrow x^3+x^2-x+44+i(3x+12)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+x^2-x+44=0 \\ 3x+12=0 \end{cases}$$

La solution de $3x+12=0$ est $x=-4$. De plus $x=-4$ est également solution de $x^3+x^2-x+44=0$. Finalement l'équation (E) admet une solution réelle unique qui est -4.
On peut à présent factoriser le polynôme $z^3+z^2+(-1+3i)z+44+12i$ par $z+4$:

$$z^3+z^2+(-1+3i)z+44+12i=(z+4)(z^2-3z+11+3i)$$

Ainsi l'équation (E) est équivalente à

$$(z+4)(z^2-3z+11+3i)=0$$

Cherchons les solutions de $z^2-3z+11+3i=0$. La méthode du discriminant nous donne les solutions suivantes :

$$z=2-3i \qquad \text{et} \qquad z=1+3i$$

4) Chercher une solution imaginaire pure : On peut de même chercher une solution imaginaire pure, i.e de la forme iy avec $y \in \mathbb{R}$. Appliquer cette méthode pour résoudre l'équation

$$z^3-(5+3i)z^2+(7+16i)z+3-21i=0$$

5) Résoudre une équation où apparait z et $\overline{z}$: On peut poser $z=x+iy$ ou encore $z=\rho e^{i\theta}$. Considérons par exemple l'équation

$$z^3=-16\overline{z}^7$$

Une solution évidente est $z=0$. Supposons que $z \neq 0$ alors il existe $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $z=\rho e^{i\theta}$. L'équation s'écrit alors

$$\rho^3e^{3i\theta}=-16\rho^7e^{-7i\theta} \Leftrightarrow \rho^{-4}e^{10i\theta}=-16 \Leftrightarrow \rho^{-4}e^{10i\theta}=16e^{i\pi}$$

Ainsi

$$\begin{cases} \rho^{-4}=16 \\ 10\theta=\pi+2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho=\frac{1}{2} \\ \theta=\frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{5},\ k \in [\![0,9]\!] \end{cases}$$